



MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS ESTADÍSTICOS MEDIANTE GRAFOS

Patricia Caro - Teresa Braicovich

caropatriciaj@yahoo.com.ar, teresabraicovich@gmail.com

Universidad Nacional del Comahue. Argentina

Tema: Pensamiento probabilístico-estadístico

Modalidad: Conferencia Regular

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Modelización - Probabilidad de estados – Grafos balanceados- Procesos estocásticos

Resumen

El eje de esta conferencia es la modelización, se mencionarán distintas concepciones de modelos y, luego, en particular de modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos deben considerarse en dos sentidos, uno de ellos extra-matemático, por ejemplo, aplicaciones de los grafos para resolver problemas y/o situaciones concretas. Además existe una modelización intra-matemática, que permite la comprensión y el manejo de nociones que no son fáciles de entender. En este último sentido, creemos que los grafos son un modelo realmente potente para trabajar determinados temas de distintas ramas de la matemática.

Luego, presentaremos, de manera sucinta, la relación entre grafos, autovalores y algunos coeficientes del polinomio característico asociados a la matriz adyacencia. Se continuará con el tema central, la modelización de problemas estadísticos mediante grafos. Se mostrará que pueden modelizar problemas estocásticos en los que se quiere calcular la probabilidad de que el sistema se encuentre en un determinado estado transcurrido cierto tiempo, esto simplifica enormemente el trabajo algebraico y además el árbol estadístico no permitiría una representación adecuada, pues tendría una cantidad infinita de ramas. Por último y para finalizar, se presentará un ejemplo de probabilidad asociado a recorridos en un cubo, cubo que será representado por un grafo planar.

DESARROLLO DE LA CONFERENCIA

1. Distintas acepciones de modelo

Se comenzará presentando distintas significaciones del término modelo, por ejemplo:

- "Algunas veces se emplea la palabra modelo en lugar de, o recíprocamente con, teoría. Se puede ver a ambas como elementos o esquemas explicatorios que tienen un amplio marco conceptual, aunque a menudo los modelos se caracterizan por el empleo de analogías para dar una representación más gráfica o visual de un fenómeno particular con tal que sean precisos y no distorsionen los hechos, los modelos son de gran ayuda para alcanzar claridad y enfocar sobre asuntos claves en la naturaleza de los fenómenos". (Cohen, L. y Manion, 2002, p.42)

- "Sin lugar a dudas, la concepción de Giere de un modelo es a la vez sencilla y potente; cualquier representación que permite pensar, hablar y actuar con rigor y profundidad sobre el sistema estudiado califica como modelo teórico: no solo los modelos altamente abstractos, sino también las maquetas, las imágenes, las tablas, las



redes, las analogías... siempre que habiliten a describir, explicar, predecir e intervenir. (Adúriz-Bravo, A. 2010).

- *"Los modelos y las teorías pueden ser comparados a mapas geográficos. estos no son copias de un terreno. son una manera de poder ubicarse. El contenido de un mapa está determinado, de la misma forma que los modelos, por el proyecto que se tuvo al hacerlos... No se puede hablar, por lo tanto, de nada absoluto o "neutro" en la producción de un mapa; se hará aquel que parezca más práctico teniendo a la vista proyectos particulares. Y un buen mapa es aquel que permite que me ubique, teniendo en cuenta los proyectos que tengo"* (Foure, G. 1995)

- *"Modo de explicación, construcción teórica, idealizada, hipotética, que sirve para el análisis o evaluación de una realidad concreta. Ejemplo; el modelo copernicano del universo o el modelo Newtoniano de la Física".* (Japiassu, H. y Marcondes, D. 1989).

La idea más cercana a *"nuestro modelo"* sería la idea de Adúriz-Bravo, pues considera una concepción muy amplia de modelos.

2. Distintas acepciones de modelo matemático

A su vez, consideraremos específicamente los modelos matemáticos, citando algunas acepciones:

- *"Es necesario destacar la existencia de diversas visiones vinculadas a la modelización matemática en el ámbito educativo. En general se entiende que la modelización vincula la matemática y el mundo real. Las aplicaciones de la matemática también manifiestan este vínculo. Sin embargo, la modelización se focaliza en la dirección que va de la realidad hacia la matemática, mientras que la aplicación se focaliza en la dirección opuesta".* (Villarreal, M.; Esteley, C. 2010).

- *"Un modelo matemático es una representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas"* (Mochón 2000, p. 19)

- *"Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas puesto que la actividad de modelización se considera como sinónimo de actividad matemática funcional en contraposición a la actividad matemática formal".* (Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J. 2010, p. 239).

A su vez, dentro de la idea de modelo matemático, se pueden diferenciar dos tipos de modelos, los modelos extra-matemáticos y los intra-matemáticos. Los modelos extra-matemáticos están relacionados con la modelización de situaciones no matemáticas, para ejemplificar mencionaremos el caso de una red de subtes, la misma será modelizada con un grafo, y se darán una serie de cuestiones referidas a inspecciones de trayectos, inspecciones de máquinas expendedora de boletos, entre otras. Una vez mencionada esta diferencia se tomarán algunos ejemplos de modelos intra-matemáticos, nos referiremos a continuación a ellos:

3. Modelos intra-matemáticos

Ejemplificaremos en este punto algunos de ellos, en particular los relacionados con álgebra lineal y estadística.



3.1. Álgebra lineal

Se mostrarán, entre otras, las siguientes relaciones entre grafos, polinomio característico de su matriz de adyacencia y autovalores:

- El grado del polinomio característico de G coincide con la cantidad de vértices del grafo G .
- El espectro de todo grafo G (simple y sin bucles) está constituido por números reales, es decir que E_G real.
- Sea G un grafo (simple y sin bucles) con p vértices, q aristas y $C_3(G)$ es el número de ciclos de longitud 3, tal que su espectro es:

$$E_G = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$$

Entonces,

- 1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 0$
- 2) $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_p^2 = 2.q$
- 3) $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \dots + \lambda_p^3 = 6.C_3(G)$

y si D es el valor del mayor grado, entonces $E_G \subset [-D, D]$

3.2. Modelización de problemas estadísticos mediante grafos

Se mostrará que, determinados problemas aleatorios, que pueden ser resueltos por diversos caminos, encuentran en los grafos una herramienta sencilla y práctica para llegar a la solución. La simulación de procesos aleatorios a través de grafos hace accesible a los alumnos problemas cuyo tratamiento formal o teórico es difícil o inadecuado, esto ocurre en procesos que dependen del tiempo y que a veces requieren de un intervalo temporal infinito.

La propuesta a desarrollar en esta conferencia es mostrar la modelización mediante grafos de ciertas situaciones en las que cada estado o suceso se caracteriza por su distancia al origen, para mostrar esto será necesario dar ciertas definiciones y propiedades. Es importante aclarar que, en el tipo de situaciones que se presentan, se hará de manera continua un paralelismo entre la resolución mediante modelización con grafos y la resolución según procedimientos más conocidos y/o habituales, como puede ser el trabajo con diagramas de árbol.

Algunas de los ejemplos se dan a continuación:

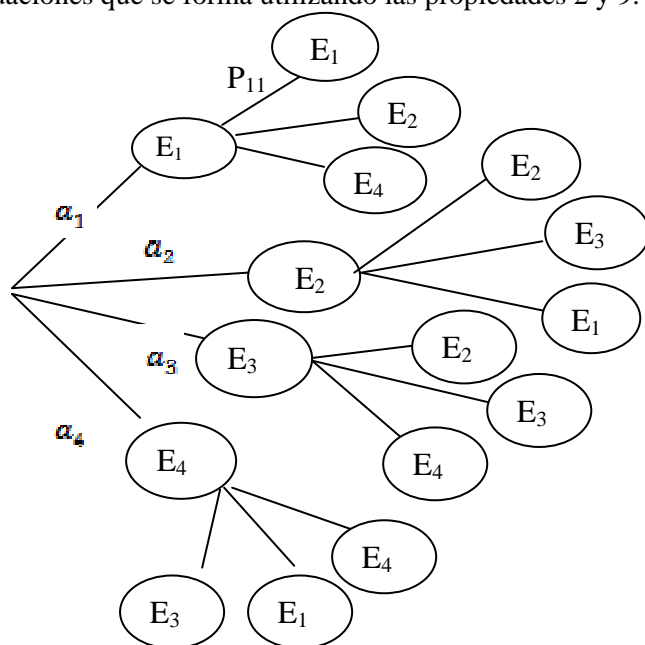
Ejemplo 1: Calcular la probabilidad de que al lanzar dos monedas se obtenga exactamente una cara

Ejemplo 2: Lanzar un dado cúbico hasta obtener un 5. La pregunta es: ¿Cuántas tiradas se necesitan para que vuelva a salir otro 5?

Ejemplo 3: En un país lejano sólo existen dos posibilidades en el clima, seco y mojado. Un estudiante de meteorología sabe que la probabilidad de que el clima sea seco el 1º de enero del año en curso es a y la probabilidad de que en dos días consecutivos el clima sea el mismo, tiene un valor p , $0 < p < 1$.

Ejemplo 4: calcular la probabilidad de cada estado, partiendo de cualquier estado inicial

Solución: método tradicional utilizando diagrama de árbol y resolviendo el sistema de ecuaciones que se forma utilizando las propiedades 2 y 9.



$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_4$$

$$a_2 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_4$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_4 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_3$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$$

CONCLUSIONES

Creemos que es sumamente importante seguir trabajando en el sentido de modelos, el modelizar situaciones mediante grafos es simplemente una de las tantísimas posibilidades que permite el trabajar con modelización, nuestra intención en esta conferencia es mostrar justamente esto.



Referencias bibliográficas

- Adúriz Bravo, A. (2010). *Hacia una didáctica de las ciencias experimentales basada en modelos*. II Congrés Internacional de Didàctiques 2010.
- Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz Higuera, L. (2006). La modelización matemática el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la TAD. *Educación Matemática*. Vol. 18. México: Santillana.
- Braicovich, T., Caro, P., Cerda, V., Osio, E., Oropeza, M, y Reyes, C. (2009). *Introducción a la Teoría de Grafos*. Buenos Aires: Docuprint S.A.
- Chiappa, R. Sanza, C. *Una introducción a Grafos y Matrices*. Editorial de la Universidad Nacional del Sur. (1999).
- Contreras, M. (1998). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. En G. Mugny y J. Pérez (Eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo*, Capítulo 2, pp. 265-288. Barcelona: Anthropos.
- Contreras M. Probabilidad geométrica, grafos y procesos aleatorios.. <http://www.mauriciocontreras.es/estadística4.pdf>. Consultado el 02/03/2012
- García, F. (2007) El álgebra como instrumento de modelización. *Investigación en Educación Matemática XI*. Universidad de Jaén. p. 71-90.
- Lavalle. A. Rubio N (2003). El ábaco probabilístico en la Enseñanza. XXXI Coloquio Argentino de Estadística.
- Pita Ruiz, C. (1991). *Álgebra lineal*. México. Editorial Mc. Graw Hill.
- Villarreal, M.; Esteley, C. (2010). Modelización matemática como estrategia pedagógica. *III Reunión Pampeana de Educación Matemática*.